Wahr Formelsammlung v.97

Ereignisraum:

Sei Ω ein endlicher Ergebnisraum:

(1) Jede Teilmenge A von Ω heißt Ereignis

(2) A tritt ein, wenn sich ein Ereignis $\omega \in \Omega$ einstellt das in A enthalten ist.

(3) Die Menge $P(\Omega)$ aller Ereignisse heißt Ereignisraum.

Menge A und B Teilmenge von M

Komplement: $\bar{A} = \{x \in M : x \notin A\}$ "nicht A"

Vereinigung: $A \cup B = \{x \in M : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ "A oder B"

Durchschnitt: $A \cap B = \{x \in M : x \in A \text{ und } x \in B\}$ "A und B"

Rechengesetze der Mengenalgebra:

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
	$A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Absorbtionsgesetz:	$A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B)$
Gesetz von de Morgan:	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Gesetz für Komplemente:	$A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cup \bar{A} = \Omega$; $\bar{\bar{A}} = A$

Relative Häufigkeit:

Tritt ein Ereignis A bei n Zufallsexperimenten k-mal ein, so heißt $\boldsymbol{h_n(A) = k/n}$ die relative Häufigkeit des Ereignisses A in dieser Versuchsfolge.

Eigenschaften:

$0 \le h_n(A) \le 1$

$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$

$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$ falls $A \cup B = \emptyset$

$h_n(A) = \sum_{\omega} h_n(\omega)$

$h_n(\bar{A}) = 1 - h_n(A)$

Die mathematische Wahrscheinlichkeit

Laplace-Experiment: Wenn alle Ergebnisse ω des endlichen Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ gleichmäßig auftreten.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Fälle bei denen A eintritt}}{\text{Anzahl aller mögl. Ereignissen}}; \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad P(\Omega) = 2^{|\Omega|}$$

statistische W.: $P(A) = \lim_{n \to \infty} h_n(A)$ Geometrische W.: $P(A) = \frac{\text{Länge der Strecken } A}{\text{Gesamtlänge}}$

Axiomatische Def. der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogoroff

Axiom1: $P_{(A)} \ge 0$ (Nichtnegativität)

Axiom2: $P_{(\omega)} = 1$ (Normierung)

Axiom3: $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) P(A) + P(B)$ (Additivität)

Bez.: $P : P(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeitsmaß

$P(A)$ Wahrscheinlichkeit von A ; (ω, P) Wahrscheinlichkeitsraum

Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen

(1) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

(2) $P(\emptyset) = 0$

(3) $A \subset B \rightarrow P(A) \le P(B)$ (Monotoniegesetz)

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $A_1, \ldots, A_N \in P(\omega)$ paarweise unvereinbar $\rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(6) $P(A) \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

W.-maße sind:
(1) Laplace-W.
(2) Empirische-W.
(3) Geometrische-W.

Additionssätze

n=2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

n=3 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

allg. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,jk=1 \\ i<j<k}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

Eine auf einen endlichen Ereignisraum $P(\Omega)$ defenierte Funktion P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über Ω, wenn für die Elementarereignisse $\{\omega\}, \omega \in \Omega$ gilt:

(1) $0 \le P(\{\omega\}) \le 1$ für alle $\omega \in \Omega$ (2) $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$

(3) $P(\emptyset) = 0$ (4) $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

Mehrfeldtafel

	A	$\bar{A}$	Zeilen summe
B	$P(A \cap B)$ +	$P(\bar{A} \cap B)$ =	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$ +	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ =	$P(\bar{B})$
Spalten summe	$P(A)$ +	$P(\bar{A})$ =	1

Zufallszahlen

Monte-Carlo-Methode: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten durch Simulation von Zufallsexperimente mit Hilfe von Zufallszahlen.

Erzeugung: (1) Laplace-Münze Wappen := 1 ; Zahl := 0

Serie:	1000	1100	1001	0000	1011	0111
	8	~~12~~	9	0	~~11~~	7

(2) Zufallstabellen: 62654, 70882, 77855,...

(3) T-Pacsal Zg.: $y_{n+1} = (y_n * 134775813 + 1) \bmod 2^{32}$ (y_0 belieb. Startwert)

Bedingung für Zufallszahlen:

a) $h_n(0) \approx h_n(1) \approx h_n(2) \approx \ldots \approx h_n(10) \approx 1/10$

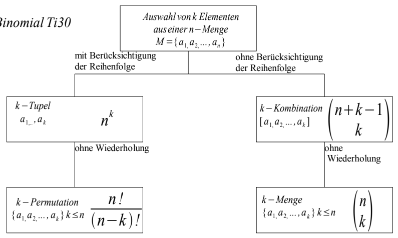
b) $h_n(00) \approx h_n(01) \approx h_n(02) \approx \ldots \approx h_n(99) \approx 1/100$

c) $h_n(000) \approx h_n(001) \approx h_n(002) \approx \ldots \approx h_n(999) \approx 1/1000$

Definition: Eine irrationale Zahl heißt normal, wenn jede endliche Zahlenfolge gleich häufig vorkommt.

Kombinatorik

ncr Binomial Ti30



Binomialk.:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)! * k!} & 0 \le k \le n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Laplace Experiment im Urnenmodell

Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(X = s) = \frac{\binom{S}{s} * \binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}}$$

Ziehen mit Zurücklegen:

$$P(X = s) = \binom{n}{s} * \left(\frac{S}{N}\right)^s * \left(1 - \frac{S}{N}\right)^{n-s}$$

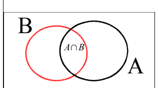
$N =$ gesamtzahl der Kugeln

$S =$ gesamtzahl der schwarzen Kugeln

$n =$ gesamtzahl der gezogenen Kugeln

$s =$ gesamtzahl der gezogenen schwarzen Kugeln

Wahrscheinlichkeit unter einer Bedingung



Wahrscheinlichkeit von A unter B

Ist B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$ und A ein Ereignis, dann heißt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

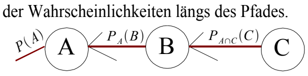
die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter (der Bedingung) B.

Produktsatz: $P(A \cap B) = P(B) * P_B(A)$

$P(A \cap B \cap C) = P(B) * P_B(A) * P_{(A \cap B)}(C)$

Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten mit B-diagramm

1. Pfadregel Die Wahrscheinlichkeit das in einem Baumdiagramm ein bestimmter Pfad durch laufen wird ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

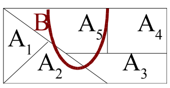


2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Pfade die dieses Ereignis bilden.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei Ω ein Ergebnisraum und sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Zerlegung von Ω

(d.h. $A_1, \ldots, A_n$ paarweise unvereinbar und $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$)



$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P_{Ai}(B)$$

Formel von Bayes

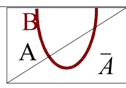
Sei $A_{1,\ldots}, A_n$ eine Zerlegung von Ω und B ein Ereignis mit $P(B) \neq 0$.

Dann gilt für jedes A:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) * P_{Ai}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) * P_{Aj}(B)}$$

für $n = 2$

$$P_B(A) = \frac{P(A) * P_A(B)}{P(A) * P_A(B) + P(\bar{A}) * P_{\bar{A}}(B)}$$



Medizin: $B =$ Sympton ; $A_i =$ mögl. Krankheit:

$P(A_i) =$ W. für das Auftreten der Krankheit.

$P_{Ai}(B) =$ Bedingte W. für das Auftreten von B.

$P_B(A_i) =$ W. für das vorliegen d. Krankheit falls B eintritt.

stochastische Unabhängigkeit von 2 Ereignissen

Die Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig in (Ω, P) wenn
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

A, B *stochastisch unabh.* $\Longleftrightarrow \begin{cases} P_A(B) = P(B) \\ P_B(A) = P(A) \end{cases}$

(1) A, B *unvereinbar* $\Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$
Es gilt für jedes $P \in \Omega$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(2) A, B *unabhängig* $\in (\Omega, P) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Sei Ω *Ergebnisraum eines Zufallsexperimentes.*
Eine Funktion $X : \Omega \to R, \omega \to X(\omega)$ *heißt* *Zufallsgröße (Zufallsvariable)*

$\omega = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\} = $ *Wertemenge von* X $(\omega \subset \mathbb{R})$ $\quad X$ *heißt* $\begin{cases} \text{diskret, falls } \omega \text{ abzählbar} \\ \text{stetig, falls } \omega \text{ überabzählbar} \end{cases}$

Sei (Ω, P) *W.-raum und* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsgröße:*
$P(X = a) = P(⅛\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\})\, a \in \omega$
$P(a < X \le b) = P(⅛\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \le b\})$
$P(X \le c) = P(⅛\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le c\})$

W.verteilungen diskreter Zufallsgrößen

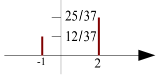
Sei X diskrete Zufallsgröße auf (Ω, P) *mit Wertemenge* $W = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$
$f : W \to [0,1], f(x_i) = P(X = x_i)$
heißt (diskrete) Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Graphische Darstellung diskreter W.-verteil.

Bsp: Roulett 1 € *auf* 1 *Dutzend Gewinn:* $X : \{0 \ldots 36\}$ $X(\omega) = \begin{cases} 2€, \omega \in \{1,12\} \\ -1€, \text{sonst} \end{cases}$

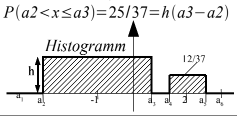
X	-1	2
$f_{(x)}$ P(X=x)	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$

Stab-diagramm



Zerlegung eines Intervalles $[a, b]$
mit $\omega \subset [a, b]$ *in disjunkte Teilintervalle*
$P(a2 < x \le a3) = 25/37 = h(a3 - a2)$

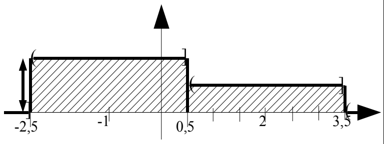
Histogramm



Dichtefunktion Beispiel

allgemein: $d(x) = \dfrac{P(a_i < X \le a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}$

X	(-2,5 , 0,5]	(0,5 , 3,5]	sonst
d(x)	$\frac{25}{337}$	$\frac{12}{337}$	0



Verteilungsfunktion diskreter Zufallsgr.

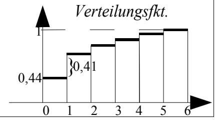
$F : \mathbb{R} \to [0,1], F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)\;\; x_i \in \omega$ *heißt diskrete Verteilungsfunktion.*

Man bestimme zu der Zufallsgröße X = Anzahl der Richtigen (i) bei einen Tipp im *Lotto* 6 *aus* 49

$f(i) = \dfrac{\binom{6}{i}\binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$

i Anzahl der Richtigen	0	1	2	3
f(xi) = P(X=i)	0,44	0,41	0,13	0,0018
i Anzahl der Richtigen	4	5		6
f(xi) = P(X=i)	0,00097	$18*10^{-8}$		$72*10^{-9}$

Verteilungsfkt.



Eigenschaften diskreter Verteilungsf.

Die Verteilungsf. F einer diskreten Zufallsgröße X besitzt folgende Eigenschaften:
(1) *F ist monoton steigend (Treppenf.)*
(2) *F ist rechtseitg stetig* $(F(x) = P(X \le \boldsymbol{x}))$ *(d.h. linksseitige Punkte gehören dazu.)*
(3) $\lim_{x_i \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
(4) $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$
(5) $F(x) = \sum_{x_i \le x = f} (x_i) \longleftrightarrow F(x) \int_{-\infty}^{x} f(t) * dt$

stetige Verteilungsfunktion

Sei X stetige Zufallsgröße auf (Ω, P):
(1) *Die Verteilungsfunktion* $F(x)$ *von X ist defeniert durch* $F(x) = P(X \le x)$
(2) $F(x)$ *heißt stetig, wenn* $F(x)$ *die folgende Integraldarstellung besitzt:* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) * dt$
X heißt dann stetig verteilt $\qquad$ *mit* $f(t) \ge 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$

(Wahrscheinlichkeits)- dichte von F(x)

Summe und Produkt von Z-zahlen

Für die Verteilungsfkt. $F(x)$ *einer diskreten oder stetigen Zufallsgröße gilt:*
$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

Sei $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) * dt$ *stetige Verteilungsfunktion einer stetige Zufallsgröße X es gilt:*
(1) *Es gilt:* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) * dt = 1$
(2) $F'(x) = f(x)$
(3) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$

Summe: $(x + y)(\omega) = x(\omega) + y(\omega)$
Produk: $(x * y)(\omega) = x(\omega) * y(\omega)$
$(r * X)(\omega) = r(X(\omega))$

Funktion einer Zufallsgröße

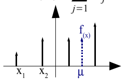
Sei $X : \omega \to \mathbb{R}$ *einer Zufallsgröße und* $g : \omega_x \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann ist*
$g(x) : \Omega \to \mathbb{R}, g(X)(\omega) = g(X(\omega))$ *ebenfalls eine Zufallsgröße.*

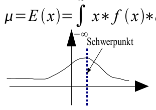
$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "x"] \arrow[rr, bend right, "g(x) = g \circ x"'] & \omega_x \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Erwartungswert

Diskrete Verteilung: $\qquad E(X) = $ *Erwartungswert* $\qquad$ *stetige Verteilung:*

$\mu = E(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j * P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j * f(x_j)$ $\qquad$ $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x) * dx$





Erwartungswert einer Funktion g(x)

Sei X $\Omega \to \mathbb{R}$ *Zufallsgröße und* $g : \mathbb{R} \to R$ *eine Funktion.* $\qquad E(ax + b) = a * E(x) + b$
Für die Zufallsgröße $g(x) : \Omega \to \mathbb{R}, g(x)(\omega) = g(x(\omega))$ *gilt.*

$E(g(x)) = \sum_{j=1}^{n} g(x_j) * f(x_j)$ $\qquad$ $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) * f(x)\,dx$

Varianz

Sei μ *der Erwartungswert von X. Die Varianz* $V(X)$ *von x ist defeniert durch:*
diskrete Verteilung: $\qquad$ *stetige Verteilung*

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 * f(x_i)$ $\qquad$ $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 * f(x)\,dx$

$f(x_i) = P(X = x_i)$ $\qquad \sigma = \sqrt{V(X)}$ *heißt Standardabweichung von X.*

Verschiebungssatz

(1) *Es gilt Varianz von X = Erwartungswert von* $y = (X - \mu)^2$ $\qquad V(X) = E((X - \mu)^2) = E((X - E(X))^2)$
(2) *Es gilt* $\qquad V(X) = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

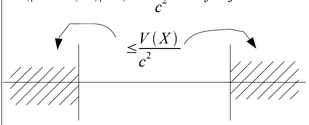
Erwartungswert von Summen von Zufallsgrößen

$E(x + y) = E(x) + E(y)$
$E(ax) = a * E(x)$ $\qquad$ *d.h. E linear*

Die Ungleichung von Tschebyscheff und Folgerung

$P(|X - E(X)| \ge c) \le \dfrac{V(X)}{c^2}$ *für jedes* $c > 0$

(1) $P(\mu - c < X < \mu + c) \ge 1 - \dfrac{V(X)}{c^2}$
(2) $P(\mu - \delta * r < X < \mu + \delta * r) \ge 1 - \dfrac{1}{r^2}$ $\quad r > 0$



Binomialverteilung

Zufallsexp. mit nur 2 *Ergebnisse. A und* $\bar{A}$ = *Bernoulli Experminet.*
$n-$ *fache Ausführung = Bernoulli Kette der Länge n.*
(1) ***Die W.-verteilung*** $\boldsymbol{B(n, p)}$:
$B(n, p, k) := P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$

Verteilungsfkt.:
$F(x) = \begin{cases} \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, & x \ge 0, \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$
summierte Binomialverteilung

$\boxed{X = \text{Anzahl der Treffer}, p = \text{Trefferwahrscheinlichkeit}, n = \text{Länge}}$

(1) *Ist x* $B(n, 1/2)-$*verteilt so gilt* $\boldsymbol{P(X = k) = P(X = n - k)}$ $\quad 0 \le k \le n$
(2) *Ist x* $B(n, p)-$*verteilt und Y* $B(n, 1 - p)-$*verteilt so gilt* $P(X = k) = P(Y = n - k)$
(3) Die B-verteilung nimmt ihr max. im Intervall $[(n + 1) * p - 1, (n + 1) * p]$ *an*

Urnenmodell

$N = $ *Kugeln;* $S = $ *schw. Kugeln,* $N - S$ *weiße Kugeln,*
$X = $ Anz der gez. schw. Kugeln bei n Ziehungen $=$ *binomialverteit*

$P(X = s) = \binom{n}{s} * p^s * (1 - p)^{n-s} = \binom{n}{s}\left(\dfrac{S}{N}\right)\left(1 - \dfrac{S}{N}\right)^{n-s}$ $\qquad p = \dfrac{S}{N}$

Sei X B(n,p)-verteilt es gilt

(1) $E(X) = n * p$
(2) $V(X) = n * p(1 - p)$

Bernoullische Gesetz der großen Zahlen

$P(|H_n - p| < \epsilon) \ge 1 - \dfrac{p(1 - p)}{n * \epsilon^2}$ *d.h.* $\lim_{n \to \infty} P(|H_n - p| < \epsilon) = 1$ $\qquad p(1 - p) \le \dfrac{1}{4}$

Geometrischer Verteilung

Zufallsgröße heißt hypergeo. verteilt mit den Parametern under $S \le N$ $n \le N$ *wenn:*

(1) $W_X = \{0, \ldots, S\}$ $\quad$ (2) $P(X = s) = \dfrac{\binom{S}{s} * \binom{N - S}{n - s}}{\binom{N}{n}}$ $\quad$ s = 0,...,S

Annäherung der hyperg. Verteilung durch Binomialvert.

$$Für\ \frac{N}{n}\geq 10\ und\ p=\frac{S}{N}\ gilt: \quad \frac{\binom{S}{s}*\binom{N-S}{n-s}}{\binom{N}{n}} \approx \binom{n}{s}*p^s(1-p)^{n-s}$$

Poisson Verteilt

Zufallsgröße X heißt poissonverteilt mit den Parametern $\mu>0$ ($P(\mu)$*-verteilt*) *wenn:*

(1) $W_x=\mathbb{N}$

(2) $P(\mu,k)=P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$

$X\ P(\mu)-verteilt \rightarrow$ (1) $E(X)=\mu$ (2) $V(X)=\mu$

- Betriebsunfälle pro Zeiteinheit
- Ankünfte in Warteschlange je Zeitpunkt
- Druckfehler pro Seite in Bücher
- Ausschussstücke einer Produktionsserie
- Ausfall eines PCs pro Zeiteinheit
- Schadensmeldungen bei Versicherungen

Annäherung der Binomialvert. durch Poissonvert.

$$Für\ \boldsymbol{p}\leq\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{10}\boldsymbol{n}}}\ und\ \mu=\boldsymbol{n}*\boldsymbol{p}\ gilt: \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

$\mu=n*p$

Gleichverteilung

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ,a<x<b\\ 0 & ,sonst\end{cases}\ heißt\ gleichverteilt$$

Bem.: $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)*dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}*dx=1$

$\boldsymbol{X}\ gleichverteilt \rightarrow E(X)=\frac{b+a}{2}\ V(X)=\frac{(b-a)^2}{2}$

Expotentialverteilung

Dichtefunktion: *Verteilungsfunktion:*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda*e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,sonst\end{cases}\ \lambda>0\ F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\\ 0 & ,sonst\end{cases}\ heißt\ exponentialverteilt.$$

$E(X)=\frac{1}{\lambda}$

$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

Normalverteilung

$$\varphi_{\mu\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}*e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \phi_{\mu\sigma}(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}*\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}*dt$$

Standartisierte Zufallsgröße

Es gilt:
$X\ N(\mu,\sigma^2)-verteilt \quad \rightarrow E(X)=\mu \quad V(X)=\sigma^2$

Zufallsgröße X ***standarisiert****, wenn* $E(X)=0 \quad V(X)=1$

Eine $N(0,1)$*-verteilte Zufallsgröße S ist standarasiert und heißt Standartnormalverteilung:*

$$\varphi(x)=\varphi_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad \phi_{(x)}=\phi_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-t^2}{2}}*dt$$

Es gilt:
$\varphi(x)=\varphi(-x)$
$\phi(-x)=1-\phi(x)$

$X\ N(\mu,\sigma^2)-verteilt$

(1) $\varphi_\mu(x)=\frac{1}{\sigma}\ \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

(2) $\phi_\mu(x)=\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

(3) $P(a\leq X<b)=\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$P(|X-\mu|\leq k\sigma)=2\phi(k)-1$

Annäherung der Binomialvert. durch Normal

$B(n,p,k)=P(X=k)=\binom{n}{k}*p^k(1-p)^{n-k}$

$\mu=n*p$
$\sigma^2=n*p*q$

Für große n und $0<p<1$ *gilt mit* $\mu=\boldsymbol{n}*\boldsymbol{p}$ *und* $\sigma^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{n}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}$

$$B(n,p,k)\approx\phi_{\mu\sigma}(k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}*e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2}=\phi_{\mu\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi*n*p*q}}*e^{\frac{-1}{2}\frac{(k-n*p)^2}{n*p*q}}$$

Faustformel: $\sigma^2=n*p*q>9$

Summenproblem

$X\ B(n,p)-verteilt \qquad P(x_1\leq X\leq x_2)=\sum_{k=x_1}^{x_2}B(n,p,k)$

$\mu=n*p$
$\sigma^2=n*p*q$

Ist X eine $B(n,p)$*-verteilte Zufallsgröße und ist a* $x_1,x_2\in W_x=\{0,..,N\}$
so gilt für große n und beliebige p mit $\mu=\boldsymbol{n}*\boldsymbol{p}$ *und* $\sigma^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{n}*\boldsymbol{p}*\boldsymbol{q}$ *die Näherung:*

(1) $P(x_1\leq X\leq x_2)\approx\phi\left(\frac{x_2-\mu+0,5}{\sigma}\right)-\phi\left(\frac{x_1-\mu-0,5}{\sigma}\right)$

(2) $P(X\leq a)\approx\phi\left(\frac{a-\mu+0,5}{\sigma}\right)$